8

Métodos de muestreo y teorema central del límite

El informe anual de Nike indica que el estadounidense promedio compra 6.5 pares de zapatos deportivos al año. Suponga que la desviación estándar de la población es de 2.1 y que se analizará una muestra de 81 clientes el siguiente año. ¿Cuál es el error estándar de la media en este experimento? (Vea el objetivo 5 y el ejercicio 45.)

Objetivos de aprendizaje

Al concluir el capítulo, será capaz de:

OA1 Explicar la razón por qué, con frecuencia, una muestra es la única forma viable para conocer algo sobre una población.

OA2 Describir métodos para seleccionar una muestra.

OA3 Definir un error de muestreo.

OA4 Definir y construir una distribución muestral de la media de la muestra.

OA5 Comprender y explicar el teorema central del límite.

OA6 Definir el error estándar de la media.

OA7 Aplicar el teorema central del límite para calcular probabilidades de seleccionar posibles medias muestrales de una población específica.

8.1 Introducción

En los capítulos 2 a 4 se hizo hincapié en las técnicas para describir datos. Con el fin de ilustrar dichas técnicas, se organizaron las ganancias sobre 180 vehículos que el mes pasado vendió Applewood Auto Group en una distribución de frecuencias para calcular las diversas medidas de ubicación y dispersión. Dichas medidas, como la media y la desviación estándar, describen el precio de venta habitual y la dispersión de las ganancias. En esos capítulos se destacó la descripción de la condición de los datos: se describió algo que ya había sucedido.

En el capítulo 5 se comienza a establecer el fundamento de la inferencia estadística con el estudio de la probabilidad. Recuerde que, en la inferencia estadística, el objetivo es determinar algo sobre una *población* a partir sólo de una *muestra*. La población es todo el grupo de individuos u objetos en estudio, y la muestra es una parte o subconjunto de dicha población. El capítulo 6 amplía los conceptos de probabilidad al describir tres distribuciones de probabilidad discreta: binomial, hipergeométrica y de Poisson. En el capítulo 7 se describen tres distribuciones de probabilidad continua: la uniforme, la normal y la exponencial. Las distribuciones de probabilidad abarcan todos los posibles resultados de un experimento, así como la probabilidad asociada con cada resultado. Mediante las distribuciones de probabilidad se evaluó la posibilidad de que algo ocurra en el futuro.

En este capítulo comienza el estudio del muestreo, herramienta para inferir algo sobre una población. Primero se analizan los métodos para seleccionar una muestra de una población. Después se construye una distribución de la media de la muestra para entender la forma en que las medias muestrales tienden a acumularse en torno a la media de la población. Por último, se demuestra que, para cualquier población, la forma de esta distribución de muestreo tiende a seguir la distribución de probabilidad normal.

Estadística en acción

Con el importante papel que desempeña la estadística inferencial en todas las ramas de la ciencia, es ya una necesidad disponer de fuentes copiosas de números aleatorios. En 1927 se publicó el primer libro de números aleatorios, con 41 600 dígitos, generados por L. Tippett. En 1938, R.A. Fisher y E. Yates publicaron 15 000 dígitos aleatorios, generados con dos barajas. En 1955, RAND Corporation publicó un millón de dígitos aleatorios, generados por pulsos de frecuencia aleatorios de una ruleta electrónica. En 1970, las aplicaciones del muestreo requerían miles de millones de números aleatorios. Desde entonces se han creado métodos para generar, con ayuda de computadoras, dígitos "casi" aleatorios, por lo que se les llama *pseudoaleatorios*. Aún es motivo de debate la pregunta acerca de si un programa de computadora sirve para generar números aleatorios que de verdad lo sean.

8.2 Métodos de muestreo

Ya se mencionó en el capítulo 1 que el propósito de la estadística inferencial consiste en determinar algo sobre una población a partir de una muestra. Una muestra es una porción o parte de la población de interés. En muchos casos, el muestreo resulta más accesible que el estudio de toda la población. En esta sección se explican las razones principales para muestrear y, en seguida, diversos métodos para elegir una muestra.

Razones para muestrear

Cuando se estudian las características de una población, existen diversas razones prácticas para preferir algunas partes o muestras de ella para observar y medir. He aquí algunas razones para muestrear:

1. **Establecer contacto con toda la población requeriría mucho tiempo.** Un candidato para un puesto federal quizá desee determinar las posibilidades que tiene de resultar elegido. Una encuesta de muestreo en la que se utiliza el personal y las entrevistas de campo convencionales de una empresa especializada en encuestas tardaría de uno a dos días. Con el mismo personal y los mismos entrevistadores, y laborando siete días a la semana, se requerirían 200 años para ponerse en contacto con toda la población en edad de votar. Aunque fuera posible reunir a un numeroso equipo de encuestadores, quizá no valdría la pena entrar en contacto con todos los votantes.
2. **El costo de estudiar todos los elementos de una población resultaría prohibitivo.** Por lo general, las organizaciones que realizan encuestas de opinión pública y pruebas entre consumidores, como Harris International, CBS News Polls y Zogby International, entran en contacto con menos de 2 000 de las casi 60 millones de familias en Estados Unidos. Una organización que entrevista a consumidores en panel cobra cerca de $40 000 por enviar muestras por correo y tabular las respuestas con el fin de probar un producto (como un cereal para el desayuno, alimento para gato o algún perfume). La misma prueba del producto con las 60 millones de familias tendría un costo de alrededor de $1 000 000 000.

OA1 Explicar la razón por qué, con frecuencia, una muestra es la única forma viable para conocer algo sobre una población.

3. **Es imposible verificar de manera física todos los elementos de la población.** Algunas poblaciones son infinitas. Sería imposible verificar toda el agua del lago Erie en lo que se refiere a niveles de bacterias, así que se eligen muestras en diversos lugares de él. Las poblaciones de peces, aves, serpientes o mosquitos son grandes, y se desplazan, nacen y mueren de manera continua. En lugar de intentar contar todos los patos que hay en Canadá o todos los peces del lago Pontchartrain, se hacen aproximaciones mediante diversas técnicas: se cuentan todos los patos que hay en un estanque, capturados al azar, se revisan las cestas de los cazadores o se colocan redes en lugares predeterminados en el lago.

4. **Algunas pruebas son de naturaleza destructiva.** Si los catadores de vino de Sutter Home Winery, California, se bebieran todo el vino para evaluar la vendimia, acabarían con la cosecha y no quedaría nada disponible para la venta. En el área de producción industrial: las placas de acero, cables y productos similares deben contar con una resistencia mínima a la tensión. Para cerciorarse de que el producto satisface la norma mínima, el departamento de control de calidad elige una muestra de la producción. Cada pieza se somete a tensión hasta que se rompe y se registra el punto de ruptura (medido en libras por pulgada cuadrada). Es obvio que si se sometieran todos los cables o todas las placas a pruebas de resistencia a la tensión no habría productos disponibles para vender o utilizar. Por la misma razón, sólo unas cuantas semillas se someten a pruebas de germinación en Burpee Seeds, Inc., antes de la temporada de siembra.
5. **Los resultados de la muestra son adecuados.** Aunque se contara con recursos suficientes, es difícil que la precisión de una muestra de 100% —toda la población— resulte esencial en la mayoría de los casos. Por ejemplo, el gobierno federal utiliza una muestra de tiendas de comestibles distribuidas en Estados Unidos para determinar el índice mensual de precios de los alimentos. Los precios del pan, frijol, leche y otros productos de primera necesidad se incluyen en el índice. Resulta poco probable que la inclusión de todas las tiendas de comestibles de Estados Unidos influya significativamente en el índice, pues los precios de la leche, el pan y otros productos de primera necesidad no varían más de unos cuantos centavos de una cadena de tiendas a otra.

Muestreo aleatorio simple

El tipo de muestreo más común es el **muestreo aleatorio simple**.

OA2 Describir métodos para seleccionar una muestra.

MUESTREO ALEATORIO SIMPLE Muestra seleccionada de manera que cada elemento o individuo de la población tenga las mismas posibilidades de que se le incluya.

Una tabla de números aleatorios es una forma eficiente de seleccionar a los miembros de una muestra.

Para ejemplificar el muestreo aleatorio simple y la selección, suponga que una población consta de 845 empleados de Nitra Industries, de la cual se va a elegir una muestra de 52 empleados. Una forma de asegurarse de que todos los empleados de la población tienen las mismas posibilidades de que se les elija consiste en escribir primero el nombre de cada empleado en un papel y depositarlos todos en una caja. Después de mezclar todos los papeles, se efectúa la primera selección tomando uno de la caja sin mirarlo. Se repite este proceso hasta terminar de elegir la muestra de 52 empleados.

Un método más conveniente de seleccionar una muestra aleatoria consiste en utilizar un número de identificación por cada empleado y una **tabla de números aleatorios** como la del apéndice B.6. Como su nombre lo indica, estos números se generaron mediante un proceso aleatorio (en este caso, con una computadora). La probabilidad de 0, 1, 2, …, 9 es la misma para cada dígito de un número. Por consiguiente, la probabilidad de que se seleccione al empleado 011 es la misma que tienen los empleados 722 o 382. Cuando se emplean núme-

Estadística en acción

¿Es discriminación sacar ventaja del físico? Antes de contestar, considere un artículo reciente que apareció en *Personnel Journal.* Estos hallazgos indican que los hombres y mujeres atractivos ganan alrededor de 5% más que los que tienen una apariencia promedio, quienes, a su vez, ganan 5% más que sus compañeros poco agraciados. Esta preferencia afecta tanto a hombres como a mujeres. También es cierto en el caso de gran variedad de ocupaciones, desde la construcción hasta la reparación de automóviles y los empleos de telemarketing, empleos para los que, según se cree, la apariencia no es importante.

ros aleatorios para seleccionar empleados, se elimina la influencia o sesgo del proceso de selección.

En la siguiente ilustración aparece parte de una tabla de números aleatorios. Para seleccionar una muestra de empleados, elija primero un punto de partida en la tabla; cualquier punto sirve. Ahora suponga que el reloj marca las 3:04. Puede observar la tercera columna y en seguida desplazarse hacia abajo hasta el cuarto conjunto de números. El número es 03759. Como sólo hay 845 empleados, utilizará los tres primeros dígitos de un número aleatorio de cinco dígitos. Por lo tanto, 037 es el número del primer empleado que se convertirá en miembro de la muestra. Otra forma de elegir el punto de partida consiste en cerrar los ojos y señalar un número de la tabla. Para continuar, puede desplazarse en cualquier sentido. Suponga que lo hace hacia la derecha. Los primeros tres dígitos del número a la derecha de 03759 son 447, el número del siguiente empleado seleccionado para integrar la muestra. El siguiente número de tres dígitos a la derecha es 961. Omita 961, pues sólo hay 845 empleados. Continúe hacia la derecha y seleccione al empleado 784; después el 189 y así en lo sucesivo.

5 0 5 2 5	5 7 4 5 4	2 8 4 5 5	6 8 2 2 6	3 4 6 5 6	3 8 8 8 4	3 9 0 1 8
7 2 5 0 7	5 3 3 8 0	5 3 8 2 7	4 2 4 8 6	5 4 4 6 5	7 1 8 1 9	9 1 1 9 9
3 4 9 8 6	7 4 2 9 7	0 0 1 4 4	3 8 6 7 6	8 9 9 6 7	9 8 8 6 9	3 9 7 4 4
6 8 8 5 1	2 7 3 0 5	0 3 7 5 9	4 4 7 2 3	9 6 1 0 8	7 8 4 8 9	1 8 9 1 0
0 6 7 3 8	6 2 8 7 9	0 3 9 1 0	1 7 3 5 0	4 9 1 6 9	0 3 8 5 0	1 8 9 1 0
1 1 4 4 8	1 0 7 3 4	0 5 8 3 7	2 4 3 9 7	1 0 4 2 0	1 6 7 1 2	9 4 4 9 6
		Punto de partida	Segundo empleado		Tercer empleado	Cuarto empleado

La mayoría de los paquetes de software contienen una rutina para seleccionar una muestra aleatoria simple. En el siguiente ejemplo se emplea el sistema Excel para elegir una muestra aleatoria.

Ejemplo

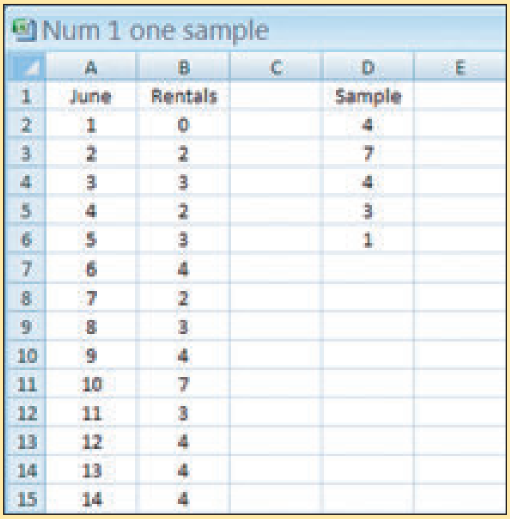
Jane y Joe Millar administran el Foxtrot Inn, una pensión donde dan alojamiento y desayuno, localizada en Tryon, Carolina del Norte. El negocio tiene ocho habitaciones. A continuación aparece el número de estas ocho habitaciones rentadas diariamente durante junio de 2011. Utilice Excel para seleccionar una muestra de cinco noches de junio.

Junio	Habitaciones en renta	Junio	Habitaciones en renta	Junio	Habitaciones en renta
1	0	11	3	21	3
2	2	12	4	22	2
3	3	13	4	23	3
4	2	14	4	24	6
5	3	15	7	25	0
6	4	16	0	26	4
7	2	17	5	27	1
8	3	18	3	28	1
9	4	19	6	29	3
10	7	20	2	30	3

Solución

Excel seleccionará la muestra aleatoria y arrojará los resultados. En la primera fecha que se muestreó había cuatro habitaciones rentadas. En la segunda fecha muestreada de junio, se rentaron siete habitaciones. La información aparece en la columna D de la hoja de cálculo de

Excel. Los pasos en Excel se incluyen en la sección **Comandos de software**, al final del capítulo. El sistema Excel lleva a cabo el muestreo *con* reemplazo. Esto significa que tal vez el mismo día aparezca más de una vez en una muestra.


Num 1 one sample

	A	B	C	D	E
1	June	Rentals		Sample	
2	1	0		4	
3	2	2		7	
4	3	3		4	
5	4	2		3	
6	5	3		1	
7	6	4			
8	7	2			
9	8	3			
10	9	4			
11	10	7			
12	11	3			
13	12	4			
14	13	4			
15	14	4			

Autoevaluación 8-1

La siguiente lista incluye a los estudiantes que se matricularon en un curso de introducción a la estadística administrativa. Se eligen al azar tres estudiantes, a quienes se formulan varias preguntas relacionadas con el contenido del curso y el método de enseñanza.

a) Se escriben a mano los números 00 a 45 en papeletas y se colocan en un recipiente. Los tres números seleccionados son 31, 7 y 25. ¿Qué estudiantes se van a incluir en la muestra?

b) Ahora utilice la tabla de dígitos aleatorios, apéndice B.6, para seleccionar su propia muestra.

c) ¿Qué haría si localizara el número 59 en la tabla de números aleatorios?

CSPM 264 01 BUSINESS & ECONOMIC STAT
8:00 AM 9:40 AM MW ST 118 LIND D

RANDOM NUMBER	NAME	CLASS RANK	RANDOM NUMBER	NAME	CLASS RANK
00	ANDERSON, RAYMOND	SO	23	MEDLEY, CHERYL ANN	SO
01	ANGER, CHERYL RENEE	SO	24	MITCHELL, GREG R	FR
02	BALL, CLAIRE JEANETTE	FR	25	MOLTER, KRISTI MARIE	SO
03	BERRY, CHRISTOPHER G	FR	26	MULCAHY, STEPHEN ROBERT	SO
04	BOBAK, JAMES PATRICK	SO	27	NICHOLAS, ROBERT CHARLES	JR
05	BRIGHT, M. STARR	JR	28	NICKENS, VIRGINIA	SO
06	CHONTOS, PAUL JOSEPH	SO	29	PENNYWITT, SEAN PATRICK	SO
07	DETLEY, BRIAN HANS	JR	30	POTEAU, KRIS E	JR
08	DUDAS, VIOLA	SO	31	PRICE, MARY LYNETTE	SO
09	DULBS, RICHARD ZALFA	JR	32	RISTAS, JAMES	SR
10	EDINGER, SUSAN KEE	SR	33	SAGER, ANNE MARIE	SO
11	FINK, FRANK JAMES	SR	34	SMILLIE, HEATHER MICHELLE	SO
12	FRANCIS, JAMES P	JR	35	SNYDER, LEISHA KAY	SR
13	GAGHEN, PAMELA LYNN	JR	36	STAHL, MARIA TASHERY	SO
14	GOULD, ROBYN KAY	SO	37	ST. JOHN, AMY J	SO
15	GROSENBACHER, SCOTT ALAN	SO	38	STURDEVANT, RICHARD K	SO
16	HEETFIELD, DIANE MARIE	SO	39	SWETYE, LYNN MICHELE	SO
17	KABAT, JAMES DAVID	JR	40	WALASINSKI, MICHAEL	SO
18	KEMP, LISA ADRIANE	FR	41	WALKER, DIANE ELAINE	SO
19	KILLION, MICHELLE A	SO	42	WARNOCK, JENNIFER MARY	SO
20	KOPERSKI, MARY ELLEN	SO	43	WILLIAMS, WENDY A	SO
21	KOPP, BRIDGETTE ANN	SO	44	YAP, HOCK BAN	SO
22	LEHMANN, KRISTINA MARIE	JR	45	YODER, ARLAN JAY	JR

Muestreo aleatorio sistemático

En algunos estudios, el procedimiento de muestreo aleatorio simple resulta complicado. Por ejemplo, suponga que la división de ventas de Computer Graphic, Inc., necesita calcular rápidamente el ingreso medio en dólares por venta del mes pasado. La división confirmó que se registraron 2 000 ventas y se almacenaron en cajones de archivo, y se decidió seleccionar 100 recibos para calcular el ingreso medio en dólares. El muestreo aleatorio simple requiere la numeración de cada recibo antes de utilizar la tabla de números aleatorios para seleccionar los 100 recibos. Dicho proceso de numeración puede tardar mucho tiempo. En su lugar, es posible aplicar el **muestreo aleatorio sistemático**.

MUESTREO ALEATORIO SISTEMÁTICO Se selecciona un punto aleatorio de inicio y posteriormente se elige cada *k*-ésimo miembro de la población.

Estadística en acción

Los métodos de muestreo aleatorio y sin sesgos son muy importantes para realizar inferencias estadísticas válidas. En 1936 se efectuó un sondeo de opinión para predecir el resultado de la carrera presidencial entre Franklin Roosevelt y Alfred Landon. Se enviaron diez millones de papeletas en forma de postales retornables gratuitas a domicilios tomados de directorios telefónicos y registros de automóviles. Se contestó una alta proporción de papeletas, con 59% en favor de Landon y 41% de Roosevelt. El día de la elección, Roosevelt ganó con 61% de los votos. Landon obtuvo 39%. Sin duda, a mediados de la década de 1930, la gente que tenía teléfono y automóvil no era representativa de los votantes estadounidenses.

Primero se calcula *k,* que es el resultado de dividir el tamaño de la población entre el tamaño de la muestra. En el caso de Computers Graphic, Inc., seleccione cada vigésimo recibo (2 000/100) de los cajones del archivo; al hacerlo evita el proceso de numeración. Si *k* no es un número entero, hay que redondearlo.

Para seleccionar el primer recibo emplee el muestreo aleatorio simple. Por ejemplo, seleccione un número de la tabla de números aleatorios entre 1 y *k,* en este caso, 20. Suponga que el número aleatorio resultó ser 18. Entonces, a partir del recibo 18, se seleccionará cada vigésimo recibo (18, 38, 58, etc.) como muestra.

Antes de aplicar el muestreo aleatorio sistemático, debe observar con cuidado el orden físico de la población. Cuando el orden físico se relaciona con la característica de la población, no debe aplicar el muestreo aleatorio sistemático. Por ejemplo, si los recibos se archivan en orden creciente de ventas, el muestreo aleatorio sistemático no garantiza una muestra aleatoria. Debe aplicar otros métodos de muestreo.

Muestreo aleatorio estratificado

Cuando una población se divide en grupos a partir de ciertas características, se aplica el **muestreo aleatorio estratificado** con el fin de garantizar que cada grupo se encuentre representado en la muestra. A los grupos también se les denomina **estratos**. Por ejemplo, los estudiantes universitarios se pueden agrupar en estudiantes de tiempo completo o de medio tiempo, por sexo, masculino o femenino, tradicionales o no tradicionales. Una vez definidos los estratos, se aplica el muestreo aleatorio simple en cada grupo o estrato con el fin de formar la muestra.

MUESTRA ALEATORIA ESTRATIFICADA Una población se divide en subgrupos, denominados *estratos,* y se selecciona al azar una muestra de cada estrato.

Por ejemplo, puede estudiar los gastos en publicidad de las 352 empresas más grandes de Estados Unidos. Suponga que el objetivo del estudio consiste en determinar si las empresas con altos rendimientos sobre el capital (una medida de rentabilidad) gastan en publicidad la mayor parte del dinero ganado que las empresas con un registro de bajo rendimiento o déficit. Para asegurar que la muestra sea una representación imparcial de las 352 empresas, éstas se deben agrupar de acuerdo con su rendimiento porcentual sobre el capital. La tabla 8-1 incluye los estratos y las frecuencias relativas. Si aplicara el muestreo aleatorio simple, observe que las empresas del tercero y cuarto estratos tienen una probabilidad alta de que se les seleccione (0.87), mientras que las empresas de los demás estratos tienen menos (0.13). Podría no seleccionar ninguna de las empresas que aparecen en los estratos 1 o 5 *sencillamente por azar.* No obstante, el muestreo aleatorio estratificado garantizará que por lo menos una empresa de los estratos 1 o 5 aparezca en la muestra. Considere una selección de 50 compañías para llevar a cabo un estudio minucioso. Entonces se seleccionará de forma aleatoria 1 (0.02 × 50) empresas del estrato 1; 5 (0.10 × 50), del estrato 2, etc. En este caso, el número de empresas en cada estrato es proporcional a la frecuencia relativa del estrato en la población. El muestreo estratificado ofrece la ventaja de que, en algunos casos, refleja con mayor fidelidad las características de la población que el muestreo aleatorio simple o el muestreo aleatorio sistemático.

TABLA 8-1 Número seleccionado de una muestra aleatoria estratificada proporcional

Estrato	Probabilidad (recuperación de capital)	Número de empresas	Frecuencia relativa	Número muestreado
1	30% y más	8	0.02	1*
2	De 20% a 30%	35	0.10	5*
3	De 10% a 20%	189	0.54	27
4	De 0% a 10%	115	0.33	16
5	Déficit	5	0.01	1
Total		352	1.00	50

* 0.02 de 50 = 1, 0.10 de 50 = 5, etcétera.

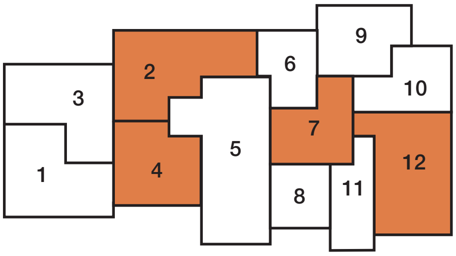
Muestreo por conglomerados

Otro tipo común de muestreo es el **muestreo por conglomerados**, que a menudo se emplea para reducir el costo de muestrear una población dispersa en cierta área geográfica.

MUESTREO POR CONGLOMERADOS La población se divide en conglomerados a partir de los límites naturales geográficos o de otra clase. A continuación se seleccionan los conglomerados al azar y se toma una muestra de forma aleatoria con elementos de cada grupo.

Suponga que desea determinar la opinión de los residentes de algún estado con referencia a las políticas federales y estatales de protección ambiental. Seleccionar una muestra aleatoria de residentes y ponerse en contacto con cada persona requeriría mucho tiempo y resultaría muy costoso. Sería mejor aplicar el muestreo por conglomerados y subdividir el estado en pequeñas unidades: condados o regiones. Con frecuencia se les conoce como *unidades primarias.*

Suponga que dividió el estado en 12 unidades primarias, seleccionó al azar cuatro regiones, 2, 7, 4 y 12, y concentró su atención en estas unidades primarias. Usted puede tomar una muestra aleatoria de los residentes de cada una de estas regiones y entrevistarse con ellos (observe que se trata de una combinación de un muestreo por conglomerados y un muestreo aleatorio simple).



Muchos métodos más de muestreo.

El estudio de los métodos de muestreo de las secciones anteriores no incluye todos los métodos de muestreo disponibles para el investigador. Si usted emprendiera un proyecto de investigación importante de marketing, finanzas, contabilidad u otras áreas, necesitaría consultar libros dedicados exclusivamente a la teoría del muestreo y al diseño de muestras.

Autoevaluación 8-2

Consulte la autoevaluación 8-1 y la lista de alumnos de la página 269. Suponga que en un muestreo aleatorio sistemático se debe elegir a cada noveno estudiante de la clase. Al principio se elige al azar al cuarto estudiante de la lista. Dicho estudiante es el número 03. Recuerde que los números aleatorios comienzan con 00, entonces, ¿qué estudiantes se elegirán como miembros de la muestra?

a) Seleccione una muestra aleatoria de cuatro agentes. Los números aleatorios son: 02, 59, 51, 25, 14, 29, 77, 69 y 18. ¿Qué distribuidores se incluirán en la muestra?
b) Utilice la tabla de números aleatorios para seleccionar su propia muestra de cuatro agentes.
c) Una muestra consta de cada séptimo distribuidor. El número 04 se selecciona como punto de partida. ¿Qué agentes se deben incluir en la muestra?

8.3 "Error" de muestreo

En la sección anterior se estudiaron métodos de muestreo útiles para seleccionar una muestra que constituya una representación imparcial o sin sesgos de la población. Es importante señalar que, en cada método, la selección de cualquier posible muestra de determinado tamaño de una población tiene una posibilidad o probabilidad conocida, que constituye otra forma de describir un método de muestreo sin sesgo.

Las muestras se emplean para determinar características de la población. Por ejemplo, con la media de una muestra se calcula la media de la población. No obstante, como la muestra forma parte o es una porción representativa de la población, es poco probable que su media sea *exactamente igual* a la media poblacional. Asimismo, es poco probable que la desviación estándar de la muestra sea *exactamente igual* a la desviación estándar de la población. Por lo tanto, puede esperar una diferencia entre un *estadístico de la muestra* y el *parámetro de la población* correspondiente. Esta diferencia recibe el nombre de **error de muestreo**.

OA3 Definir un error de muestreo.

ERROR DE MUESTREO Diferencia entre el estadístico de una muestra y el parámetro de la población correspondiente.

El siguiente ejemplo aclara el concepto de error de muestreo.

Ejemplo

Revise el ejemplo anterior de la página 268, en el que estudió el número de habitaciones rentadas en Foxtrot Inn, en Tryon, Carolina del Norte. La población se refiere al número de habitaciones rentadas cada uno de los 30 días de junio de 2011. Determine la media de la población. Utilice Excel u otro software de estadística para seleccionar tres muestras aleatorias de cinco días. Calcule la media de cada muestra y compárela con la media poblacional. ¿Cuál es el error de muestreo en cada caso?

Solución

Durante el mes se rentaron un total de 94 habitaciones. Por lo tanto, la media de las unidades que se rentaron por noche es de 3.13. Ésta es la media de la población. Este valor se designa con la letra griega μ.

$$\mu = \frac{\Sigma X}{N} = \frac{0 + 2 + 3 + \cdots + 3}{30} = \frac{94}{30} = 3.13$$

La primera muestra aleatoria de cinco noches dio como resultado el siguiente número de habitaciones rentadas: 4, 7, 4, 3 y 1. La media de esta muestra de cinco noches es de 3.8 habitaciones, que se representa como $\overline{X}_1$. La barra sobre la X recuerda que se trata de una media muestral, y el subíndice 1 indica que se trata de la media de la primera muestra.

$$\overline{X}_1 = \frac{\Sigma X}{n} = \frac{4 + 7 + 4 + 3 + 1}{5} = \frac{19}{5} = 3.80$$

El error de muestreo de la primera muestra es la diferencia entre la media poblacional (3.13) y la media muestral (3.80). De ahí que el error muestral sea ($\overline{X}_1 - \mu = 3.80 - 3.13 = 0.67$). La segunda muestra aleatoria de cinco días de la población de 30 días de junio arrojó el siguiente número de habitaciones rentadas: 3, 3, 2, 3 y 6. La media de estos cinco valores es de 3.4, que se calcula de la siguiente manera:

$$\overline{X}_2 = \frac{\Sigma X}{n} = \frac{3 + 3 + 2 + 3 + 6}{5} = 3.4$$

El error de muestreo es ($\overline{X}_2 - \mu = 3.4 - 3.13 = 0.27$).

En la tercera muestra aleatoria, la media fue de 1.8, y el error de muestro fue de −1.33.

Cada una de estas diferencias, 0.67, 0.27 y −1.33, representa el error de muestreo cometido al calcular la media de la población. A veces estos errores son valores positivos, lo cual indica que la media muestral sobreexcedió la media poblacional; otras veces son valores negativos, lo cual indica que la media muestral resultó inferior a la media poblacional.

Random Samples

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	June	Rentals			Sample 1	Sample 2	Sample 3	
2	1	0			4	3	0	
3	2	2			7	3	0	
4	3	3			4	2	3	
5	4	2			3	3	3	
6	5	3			1	6	3	
7	6	4		Totals	19	17	9	
8	7	2		Sample means	3.8	3.4	1.8	
9	8	3						
10	9	4						
11	10	7						
12	11	3						
13	12	4						
14	13	4						
15	14	4						
16	15	7						

Una media simple es una estimación sin sesgo de la media poblacional.

En este caso, con una población de 30 valores y muestras de 5 valores, existe una gran cantidad de muestras posibles, 142 506, para ser exactos. Para calcular este valor se aplica la fórmula de las combinaciones (5-10), de la página 174. Cada una de las 142 506 diferentes muestras cuenta con las mismas posibilidades de que se le seleccione. Cada muestra puede tener una media muestral diferente y, por consiguiente, un error de muestreo distinto. El valor del error de muestreo se basa en el valor particular de las 142 506 muestras posibles seleccionadas. Por consiguiente, los errores de muestreo son aleatorios y se presentan al azar. Si determinara la suma de estos errores de muestreo en una gran cantidad de muestras, el resultado se aproximaría mucho a cero. Sucede así porque la media de la muestra constituye un *estimador sin sesgo* de la media de la población.

8.4 Distribución muestral de la media

OA4 Definir y construir una distribución muestral de la media de la muestra.

Debido a que existe la posibilidad de que se presente un error de muestreo cuando se emplean los resultados del muestreo para aproximar un parámetro poblacional, ¿cómo hacer un pronóstico preciso relacionado con el posible éxito de un nuevo dentífrico u otro producto sobre la única base de los resultados del muestreo? ¿Cómo puede el departamento de control de calidad de una compañía de producción en serie enviar un cargamento de microchips a partir de una muestra de 10 chips? ¿Cómo pueden las organizaciones electorales de CNN-*USA Today* o ABC News-*Washington Post* hacer pronósticos precisos sobre la elección presidencial con base en una muestra de 1 200 electores registrados de una población de cerca de 90 millones? Para responder estas preguntas, primero hay que precisar el concepto de *distribución muestral de la media.*

Las medias muestrales varían de muestra en muestra.

Las medias muestrales del ejemplo anterior varían de una muestra a la siguiente. La media de la primera muestra de 5 días fue de 3.80 habitaciones, y la media de la segunda muestra fue de 3.40 habitaciones. La media poblacional fue de 3.13 habitaciones. Si se organizan las medias de todas las muestras posibles de 5 días en una distribución de probabilidad, el resultado recibe el nombre de **distribución muestral de la media**.

DISTRIBUCIÓN MUESTRAL DE LA MEDIA Distribución de probabilidad de todas las posibles medias de las muestras de un determinado tamaño muestral de la población.

El siguiente ejemplo ilustra la construcción de una distribución muestral de la media.

Ejemplo

Tartus Industries cuenta con siete empleados de producción (a quienes se les considera la población). En la tabla 8-2 se incluyen los ingresos por hora de cada uno de ellos.

TABLA 8-2 Ingresos por hora de empleados de producción en Tartus Industries

Empleado	Ingresos por hora	Empleado	Ingresos por hora
Joe	$7	Jan	$7
Sam	7	Art	8
Sue	8	Ted	9
Bob	8		

1. ¿Cuál es la media de la población?
2. ¿Cuál es la distribución muestral de la media de muestras de tamaño 2?
3. ¿Cuál es la media de la distribución muestral de la media?
4. ¿Qué observaciones es posible hacer sobre la población y la distribución muestral de la media?

Solución

He aquí las respuestas.

1. La media de la población es de $7.71, que se determina de la siguiente manera:

$$\mu = \frac{\Sigma X}{N} = \frac{\$7 + \$7 + \$8 + \$8 + \$7 + \$8 + \$9}{7} = \$7.71$$

Identifique la media de la población por medio de la letra griega μ. En los capítulos 1, 3 y 4 se convino en identificar los parámetros poblacionales con letras griegas.

2. Para obtener la distribución muestral de la media se seleccionó, sin reemplazos de la población, todas las muestras posibles de tamaño 2 y se calcularon las medias de cada muestra. Hay 21 muestras posibles, que se calcularon con la fórmula (5-10) de la página 174.

$$_NC_n = \frac{N!}{n!(N-n)!} = \frac{7!}{2!(7-2)!} = 21$$

donde $N = 7$ es el número de elementos de la población, y $n = 2$, el número de elementos de la muestra.

En la tabla 8-3 se ilustran las 21 medias muestrales de todas las muestras posibles de tamaño 2 que pueden tomarse de la población. Estas 21 muestras se utilizan para construir una distribución de probabilidad, que es la distribución muestral de la media, la cual se resume en la tabla 8-4.

TABLA 8-3 Medias muestrales de todas las muestras posibles de 2 empleados

Muestra	Empleados	Ingresos por hora	Suma	Media	Muestra	Empleados	Ingresos por hora	Suma	Media
1	Joe, Sam	$7, $7	$14	$7.00	12	Sue, Bob	$8, $8	$16	$8.00
2	Joe, Sue	7, 8	15	7.50	13	Sue, Jan	8, 7	15	7.50
3	Joe, Bob	7, 8	15	7.50	14	Sue, Art	8, 8	16	8.00
4	Joe, Jan	7, 7	14	7.00	15	Sue, Ted	8, 9	17	8.50
5	Joe, Art	7, 8	15	7.50	16	Bob, Jan	8, 7	15	7.50
6	Joe, Ted	7, 9	16	8.00	17	Bob, Art	8, 8	16	8.00
7	Sam, Sue	7, 8	15	7.50	18	Bob, Ted	8, 9	17	8.50
8	Sam, Bob	7, 8	15	7.50	19	Jan, Art	7, 8	15	7.50
9	Sam, Jan	7, 7	14	7.00	20	Jan, Ted	7, 9	16	8.00
10	Sam, Art	7, 8	15	7.50	21	Art, Ted	8, 9	17	8.50
11	Sam, Ted	7, 9	16	8.00					

TABLA 8-4 Distribución muestral de la media con $n = 2$

Media muestral	Número de medias	Probabilidad
$7.00	3	.1429
7.50	9	.4285
8.00	6	.2857
8.50	3	.1429
	21	1.0000

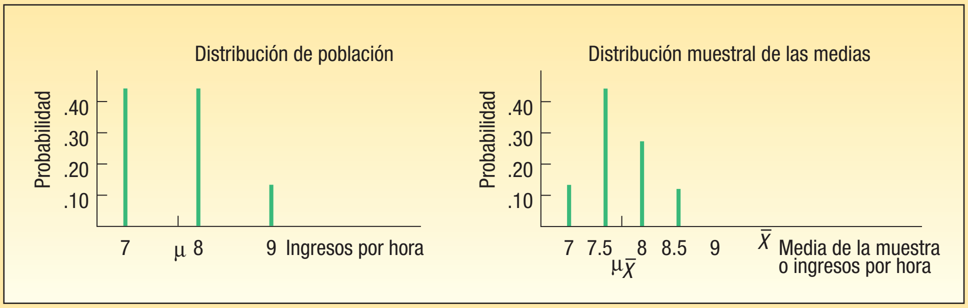
3. La media de la distribución muestral de la media se obtiene al sumar las medias muestrales y dividir la suma entre el número de muestras. La media de todas las medias muestrales se representa mediante $\mu_{\bar{X}}$. La μ recuerda que se trata de un valor poblacional, pues tomó en cuenta todas las muestras posibles. El subíndice $\bar{X}$ indica que se trata de la distribución muestral de la media.

La media de la población es igual a la media de las medias muestrales.

$$\mu_{\bar{X}} = \frac{\text{Suma de todas las medias muestrales}}{\text{Total de muestras}} = \frac{\$7.00 + \$7.50 + \cdots + \$8.50}{21}$$

$$= \frac{\$162}{21} = \$7.71$$

4. Consulte la gráfica 8-1, donde aparecen las dos distribuciones poblacionales y la distribución muestral de la media. Caben las siguientes observaciones:
   a) La media de la distribución muestral de la media ($7.71) es igual a la media de la población: $\mu = \mu_{\bar{X}}$.
   b) La dispersión de la distribución muestral de las medias es menor que la dispersión de los valores de población. La media de las muestras varía de $7.00 a $8.50, mientras que los valores de población varían de $7.00 a $9.00. Observe que, conforme se incrementa el tamaño de la muestra, se reduce la dispersión de la distribución muestral de las medias.
   c) La forma de la distribución muestral de la media y la forma de la distribución de frecuencias de los valores de población son diferentes. La distribución muestral de las medias tiende a adoptar más forma de campana y a aproximarse a la distribución de probabilidad normal.



GRÁFICA 8-1 Distribución de los valores de población y distribución muestral de las medias

En resumen, tome todas las posibles muestras aleatorias de una población y calcule un estadístico muestral (la media de los ingresos percibidos) de cada una. Este ejemplo ilustra las importantes relaciones entre la distribución poblacional y la distribución muestral de la media:

1. La media de las medias de las muestras es exactamente igual a la media de la población.
2. La dispersión de la distribución muestral de la media es más estrecha que la distribución poblacional.
3. La distribución muestral de la media suele tener forma de campana y se aproxima a la distribución de probabilidad normal.

Socio	Número de casos
Ruud	3
Wu	6
Sass	3
Flores	3
Wilhelms	0
Schueller	1

a) ¿Cuántas muestras de 3 son posibles?
b) Enumere todas las muestras posibles de 3 y calcule el número medio de casos en cada muestra.
c) Compare la media de la distribución muestral de las medias con la de la media poblacional.
d) En una gráfica similar a la 8-1, compare la dispersión en la población con la de las medias muestrales.

10. Mid-Motors Ford tiene cinco vendedores. Los cinco representantes de ventas y el número de automóviles que vendieron la semana pasada son los siguientes:

Representantes de ventas	Autos vendidos
Peter Hankish	8
Connie Stallter	6
Juan López	4
Ted Barnes	10
Peggy Chu	6

a) ¿Cuántas muestras de tamaño 2 son posibles?
b) Enumere todas las muestras posibles de tamaño 2 y calcule la media en cada muestra.
c) Compare la media de la distribución muestral de la media con la de la media poblacional.
d) En una gráfica similar a la 8-1, compare la dispersión de la población con la de la media de la muestra.

8.5 Teorema central del límite

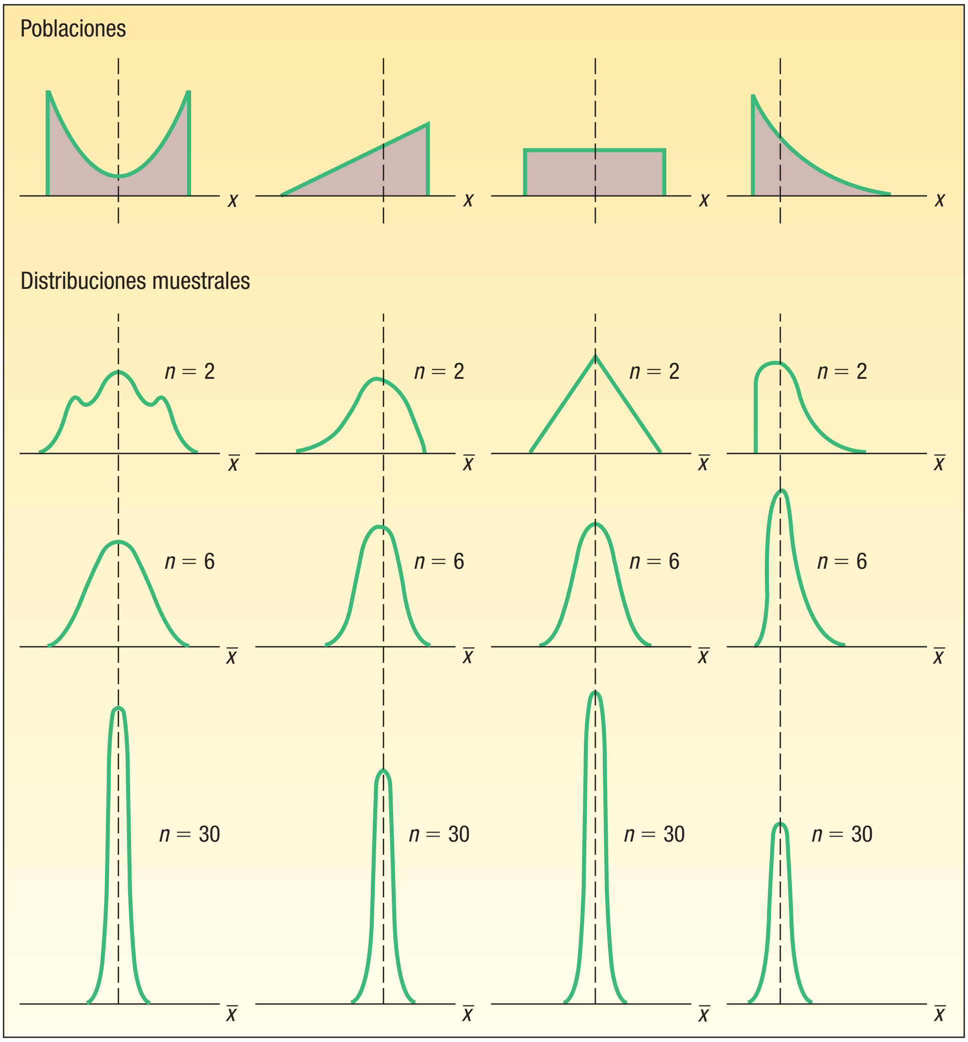
OA5 Comprender y explicar el teorema central del límite.

En esta sección se estudia el **teorema central del límite**. Su aplicación a la distribución muestral de medias, introducida en la sección anterior, permite utilizar la distribución de probabilidad normal para crear intervalos de confianza de la media poblacional (que se describe en el capítulo 9) y llevar a cabo pruebas de hipótesis (descritas en el capítulo 10). El teorema central del límite hace hincapié en que, en el caso de muestras aleatorias grandes, la forma de la distribución muestral de la media se aproxima a la distribución de probabilidad normal. La aproximación es más exacta en el caso de muestras grandes que en el de muestras pequeñas. Ésta es una de las conclusiones más útiles de la estadística. Permite razonar sobre la distribución de las medias muestrales sin ninguna información acerca de la forma de la distribución de la población de la que se toma la muestra. En otras palabras, el teorema central del límite se cumple en el caso de todas las distribuciones.

En seguida aparece el enunciado formal del teorema central del límite.

TEOREMA CENTRAL DEL LÍMITE Si todas las muestras de un tamaño en particular se seleccionan de cualquier población, la distribución muestral de la media se aproxima a una distribución normal. Esta aproximación mejora con muestras más grandes.

Si la población obedece a una distribución normal, entonces, en el caso de cualquier tamaño de muestra, la distribución muestral de las medias también será de naturaleza normal. Si la distribución poblacional es simétrica (pero no normal), se verá que la forma normal de la distribución muestral de las medias se presenta con muestras tan pequeñas como 10. Por otra parte, si se comienza con una distribución sesgada o con colas anchas, quizá se requieran muestras de 30 o más para observar la característica de normalidad. Este concepto se resume en la gráfica 8-2 para diversas formas de población. Observe la convergencia hacia una



GRÁFICA 8-2 Resultados del teorema central del límite para diversas poblaciones

distribución normal sin que importe la forma de la distribución de la población. La mayoría de los especialistas en estadística consideran que una muestra de 30 o mayor es lo bastante grande para aplicar el teorema central del límite.

Cualquier distribución muestral de la media de una muestra se moverá hacia una distribución normal a medida que incrementamos su tamaño.

La idea de que la distribución muestral de las medias de una población que no es normal converge hacia la normalidad se ilustra en las gráficas 8-3, 8-4 y 8-5. En breve se analizará este ejemplo con más detalles, pero la gráfica 8-3 es la gráfica de una distribución de probabilidad discreta con sesgo positivo. Hay varias muestras posibles de tamaño 5 que puede seleccionar de esta población. Suponga que selecciona al azar 25 muestras de tamaño 5 cada una y calcula la media de cada muestra. Estos resultados aparecen en la gráfica 8-4. Observe que la forma de la distribución muestral de las medias cambió la forma de la población original aunque sólo seleccionó 25 de las diversas muestras posibles. En otras palabras, eligió 25 muestras al azar de tamaño 5 de una población positivamente sesgada, y encontró que la distribución muestral de las medias cambió en lo que se refiere a la forma de la población. A medida que toma muestras más grandes, es decir, $n = 20$ en lugar de $n = 5$, la distribución muestral de las medias se aproximará a la distribución normal. La gráfica 8-5 muestra los resultados de 25 muestras aleatorias de 20 observaciones cada una tomadas de la misma población. Note la clara tendencia hacia la distribución de probabilidad normal. Ésta es la esencia del teorema central del límite. El siguiente ejemplo pondrá de relieve esta condición.

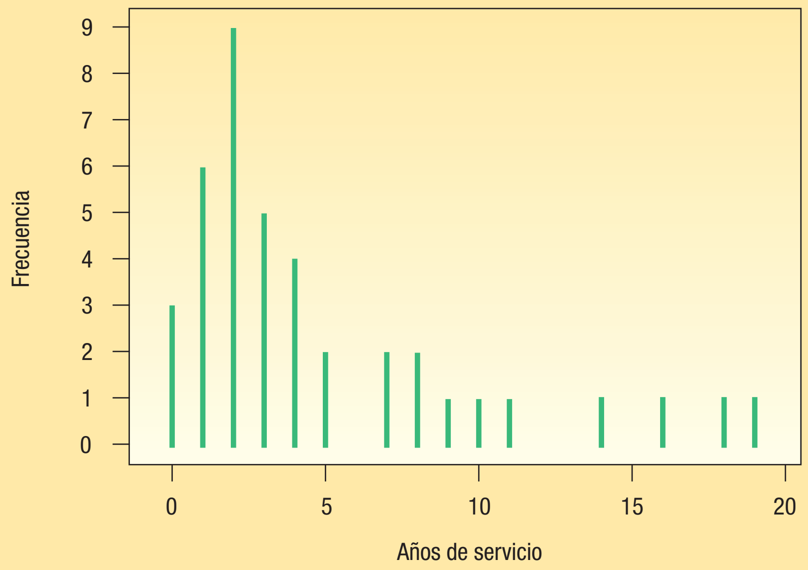
Ejemplo

Ed Spence fundó su negocio de engranes hace 20 años. El negocio creció a lo largo del tiempo y ahora cuenta con 40 empleados. Spence Sprockets, Inc., encara algunas decisiones importantes relacionadas con la atención médica de su personal. Antes de tomar una decisión definitiva sobre el programa de atención médica que va a comprar, Ed decide formar un comité de cinco empleados. Se pedirá al comité que estudie el tema del cuidado de la salud y haga alguna recomendación sobre el plan que mejor convenga a los empleados. Ed cree que el punto de vista de los empleados más recientes en relación con el cuidado de la salud difiere de los empleados con más experiencia. Si Ed selecciona al azar este comité, ¿qué puede esperar en términos del promedio de años que llevan con Spence Sprockets los miembros del comité? ¿Cuál es la forma de la distribución de los años de experiencia de todos los empleados (la población) en comparación con la forma de la distribución muestral de la media? Los tiempos de servicio (redondeados al año inmediato) de los 40 empleados que actualmente están en nómina en Spence Sprockers, Inc., son los siguientes:

11	4	18	2	1	2	0	2	2	4
3	4	1	2	2	3	3	19	8	3
7	1	0	2	7	0	4	5	1	14
16	8	9	1	1	2	5	10	2	3

Solución

La gráfica 8-3 muestra la distribución de los años de experiencia de la población de los 40 empleados. La distribución de tiempos de servicio tiene un sesgo positivo, pues unos cuantos empleados han laborado en Spence Sprockets por un periodo extenso. En específico, seis empleados han laborado en la compañía 10 años o más. Sin embargo, como el negocio creció, el número de empleados se incrementó en los últimos cinco años. De los 40 empleados, 18 han laborado en la compañía dos años o menos.



GRÁFICA 8-3 Tiempo de servicio de los empleados en Spence Sprockets

Considere el primero de los problemas de Ed Spence. A él le gustaría formar un comité de cinco empleados con el objeto de que estudien la cuestión del cuidado de la salud y sugieran el tipo de cobertura de gastos médicos más adecuada para la mayoría de ellos. ¿Cómo elegiría al comité? Si lo selecciona al azar, ¿qué puede esperar respecto del tiempo medio de servicio de quienes forman parte del comité?

Para comenzar, Ed anota el tiempo de servicio de cada uno de los 40 empleados en papeles y los coloca en una gorra de béisbol. Después los revuelve y selecciona al azar cinco de ellos. Los tiempos de servicio de estos cinco empleados son: 1, 9, 0, 19 y 14 años. Por lo tanto, el tiempo medio de servicio de estos cinco empleados muestreados es de 8.60 años. ¿Cómo se compara este resultado con la media de la población? En este momento, Ed no conoce la media de la población, aunque el número de empleados de la población es de sólo 40, así que decide calcular la media del tiempo de servicio de *todos* sus empleados. Ésta es de 4.8 años, que se determina al sumar los tiempos de servicio de *todos* los empleados y dividir el total entre 40.

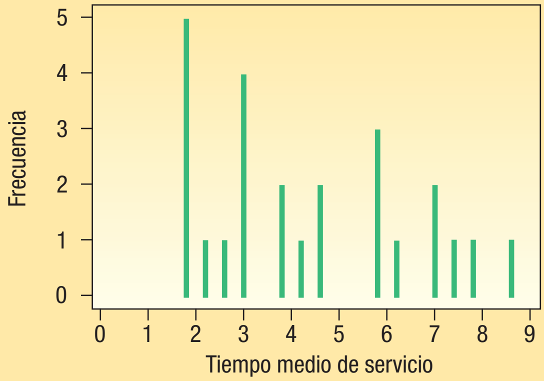
$$\mu = \frac{11 + 4 + 18 + \cdots + 2 + 3}{40} = 4.80$$

La diferencia entre la media de la muestra ($\overline{X}$) y la media de la población (μ) recibe el nombre de **error de muestreo**. En otras palabras, la diferencia de 3.80 años entre la media poblacional de 4.80 y la media muestral de 8.60 es el error de muestreo. Éste se debe al azar. Por consiguiente, si Ed selecciona a estos cinco empleados para formar el comité, el tiempo medio de servicio de éstos sería mayor que el de la media de la población.

¿Qué sucedería si Ed colocara de nuevo los papeles en la gorra y tomara otra muestra? ¿Esperaría que la media de esta segunda muestra fuera exactamente la misma que la anterior? Suponga que selecciona otra muestra de cinco empleados y encuentra que los tiempos de servicio de esta muestra son de 7, 4, 4, 1 y 3. La media muestral es de 3.80 años. El resultado de seleccionar 25 muestras de cinco empleados cada una se muestra en la tabla 8-5 y en la gráfica 8-4. En realidad hay 658 008 muestras posibles de tamaño 5 que se pueden tomar de la población de 40 empleados, las cuales se determinan con la fórmula de las combinaciones (5-10) con 40 objetos tomados de 5 en 5. Observe la diferencia de forma de las distribuciones

TABLA 8-5 Veinticinco muestras aleatorias de cinco empleados

Muestra de identificación	Datos de la muestra					Media muestral
A	1	9	0	19	14	8.6
B	7	4	4	1	3	3.8
C	8	19	8	2	1	7.6
D	4	18	2	0	11	7.0
E	4	2	4	7	18	7.0
F	1	2	0	3	2	1.6
G	2	3	2	0	2	1.8
H	11	2	9	2	4	5.6
I	9	0	4	2	7	4.4
J	1	1	1	11	1	3.0
K	2	0	0	10	2	2.8
L	0	2	3	2	16	4.6
M	2	3	1	1	1	1.6
N	3	7	3	4	3	4.0
O	1	2	3	1	4	2.2
P	19	0	1	3	8	6.2
Q	5	1	7	14	9	7.2
R	5	4	2	3	4	3.6
S	14	5	2	2	5	5.6
T	2	1	1	4	7	3.0
U	3	7	1	2	1	2.8
V	0	1	5	1	2	1.8
W	0	3	19	4	2	5.6
X	4	2	3	4	0	2.6
Y	1	1	2	3	2	1.8



GRÁFICA 8-4 Histograma de tiempos de servicio medio de 25 muestras de cinco empleados

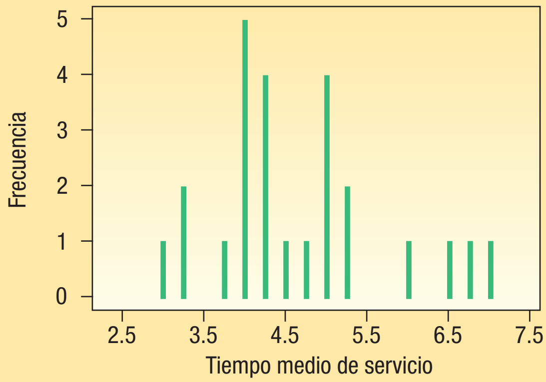
poblacional y muestral de medias. La población de tiempos de servicio de los empleados (gráfica 8-3) tiene un sesgo positivo, y la distribución de estas 25 medias muestrales no refleja el mismo sesgo positivo. También existe una diferencia en el rango de las medias muestrales en comparación con el rango de la población. La población varía de 0 a 19 años, mientras que las medias muestrales varían de 1.6 a 8.6 años.

La tabla 8-6 contiene los resultados de seleccionar 25 muestras de 20 empleados cada una y el cálculo de las medias muestrales. Estas medias muestrales aparecen en la gráfica 8-5. Compare la forma de esta distribución con la población (gráfica 8-3) y con la distribución muestral de medias si la muestra es de $n = 5$ (gráfica 8-4). Observe dos importantes características:

TABLA 8-6 Muestras aleatorias y medias muestrales de 25 muestras de 20 empleados de Spence Sprockets, Inc.

Número de muestra	Datos de la muestra (tiempo de servicio)																				Media muestral
A	3	8	3	0	2	1	2	3	11	5	1	3	4	2	7	1	1	2	4	16	3.95
B	2	3	8	2	1	5	2	0	3	1	0	7	1	4	3	11	4	4	3	1	3.25
C	14	5	0	3	2	14	11	9	2	2	1	2	19	1	0	1	4	2	19	8	5.95
D	9	2	1	1	4	10	0	8	4	3	2	1	0	8	1	14	5	10	1	3	4.35
E	18	1	2	2	4	3	2	8	2	1	0	19	4	19	0	1	4	0	3	14	5.35
F	10	4	4	18	3	3	1	0	0	2	2	4	7	10	2	0	3	4	2	1	4.00
G	5	7	11	8	11	18	1	1	16	2	2	16	2	3	2	16	2	2	2	4	6.55
H	3	0	2	0	5	4	5	3	8	3	2	5	1	1	2	9	8	3	16	5	4.25
I	0	0	18	2	1	7	4	1	3	0	3	2	11	7	2	8	5	1	2	3	4.00
J	2	7	2	4	1	3	3	2	5	10	0	1	1	2	9	3	2	19	3	2	4.05
K	7	4	5	3	3	0	18	2	0	4	2	7	2	7	4	2	10	1	1	2	4.20
L	0	3	10	5	9	2	1	4	1	2	1	8	18	1	4	3	3	2	0	4	4.05
M	4	1	2	1	7	3	9	14	8	19	4	4	1	2	0	3	1	2	1	2	4.40
N	3	16	1	2	4	4	4	2	1	5	2	3	5	3	4	7	16	1	11	1	4.75
O	2	19	2	0	2	2	16	2	3	11	9	2	8	0	8	2	7	3	2	2	5.10
P	2	18	16	5	2	2	19	0	1	2	11	4	2	2	1	4	2	0	4	3	5.00
Q	3	2	3	11	10	1	1	5	19	16	7	10	3	1	1	1	2	2	3	1	5.10
R	2	3	1	2	7	4	3	19	9	2	2	1	1	2	2	2	1	8	0	2	3.65
S	2	14	19	1	19	2	8	4	2	2	14	2	8	16	4	7	2	9	0	7	7.10
T	0	1	3	3	2	2	3	1	1	0	3	2	3	5	2	10	14	4	2	0	3.05
U	1	0	1	2	16	1	1	2	5	1	4	1	2	2	2	2	2	8	9	3	3.25
V	1	9	4	4	2	8	7	1	14	18	1	5	10	11	19	0	3	7	2	11	6.85
W	8	1	9	19	3	19	0	5	2	1	5	3	3	4	1	5	3	1	8	7	5.35
X	4	2	0	3	1	16	1	11	3	3	2	18	2	0	1	5	0	7	2	5	4.30
Y	1	2	1	2	0	2	7	2	4	8	19	2	5	3	3	0	19	2	1	18	5.05

1. La forma de la distribución muestral de las medias es diferente a la de la población. En la gráfica 8-3, la distribución de empleados tiene un sesgo positivo. No obstante, conforme selecciona muestras aleatorias de la población, cambia la forma de la distribución muestral de las medias. A medida que incrementa el tamaño de la muestra, la distribución muestral de las medias se aproxima a la distribución de probabilidad normal. Este hecho se ilustra con el teorema central del límite.
2. Hay menos dispersión en la distribución muestral de las medias que en la distribución de la población. En la población, los periodos de servicio variaron de 0 a 19 años. Cuando seleccionó muestras de tamaño 5, las medias de las muestras variaron de 1.6 a 8.6 años, y cuando seleccionó muestras de 20, las medias variaron de 3.05 a 7.10 años.



GRÁFICA 8-5 Histograma del tiempo medio de servicio de 25 muestras de 20 empleados

También puede comparar la media de las medias de la muestra con la media de la población. La media de las 25 muestras de los 20 empleados de la tabla 8-6 es de 4.676 años.

$$\mu_{\bar{X}} = \frac{3.95 + 3.25 + \cdots + 4.30 + 5.05}{25} = 4.676$$

Emplee el símbolo $\mu_{\bar{X}}$ para identificar la media de la distribución muestral de las medias. El subíndice recuerda que la distribución se refiere a la media muestral. Se lee *mu subíndice X barra.* Observe que la media de las medias muestrales, 4.676 años, se encuentra muy próxima a la media de la población de 4.80.

¿Qué concluye de este ejemplo? El teorema central del límite indica que, sin que importe la forma de la distribución de la población, la distribución muestral de la media se aproximará a la distribución de probabilidad normal. Cuanto mayor sea el número de observaciones en cada muestra, más evidente será la convergencia. El ejemplo de Spence Sprockets, Inc., demuestra el mecanismo del teorema central del límite. Comenzó con una población con sesgo positivo (gráfica 8-3). Después seleccionó 25 muestras aleatorias de 5 observaciones; calculó la media de cada muestra y, por último, organizó las 25 medias de muestra en una gráfica (gráfica 8-4). Observó un cambio en la forma de la distribución muestral de las medias respecto de la de la población. El desplazamiento va de una distribución con sesgo positivo a una que tiene la forma de la distribución de probabilidad normal.

Para aclarar más los efectos del teorema central del límite, incremente el número de observaciones en cada muestra de 5 a 20. Seleccione 25 muestras de 20 observaciones cada una y calcule la media de cada una de ellas. Por último, organice estas medias muestrales en una gráfica (gráfica 8-5). La forma del histograma de la gráfica 8-5 se desplaza claramente hacia la distribución de probabilidad normal.

En el capítulo 6, la gráfica 6-3 muestra diversas distribuciones binomiales con una proporción de *éxitos* de 0.10, lo cual es otra demostración del teorema central del límite. Observe que, conforme n se incrementa de 7 a 12 y de 20 a 40, el perfil de las distribuciones de probabilidad se desplaza para acercarse cada vez más a una distribución de probabilidad normal. La gráfica 8-5 de la página 284 también muestra la convergencia hacia la normalidad conforme n se incrementa. Esto confirma de nuevo el hecho de que, a medida que se incluyen más observaciones de la muestra de cualquier distribución poblacional, la forma de la distribución muestral de las medias se aproximará cada vez más a la distribución normal.

El teorema central del límite mismo (lea de nuevo la definición de la página 279) no dice nada sobre la dispersión de la distribución muestral de medias ni sobre la comparación entre la media de la distribución muestral de medias y la media de la población. Sin embargo, en el ejemplo de Spence Sprockets hay menor dispersión en la distribución de la media muestral que en la distribución de la población, lo que indica la diferencia entre los rangos de la población y de las medias muestrales. Observe que la media de las medias de las muestras se encuentra cerca de la media de la población. Se puede demostrar que la media de la distribución muestral es la media poblacional, es decir, que $\mu_{\overline{X}} = \mu$, y si la desviación estándar de la población es σ, la desviación estándar de las medias muestrales es $\sigma/\sqrt{n}$, en la que n es el número de observaciones de cada muestra. Entonces, $\sigma/\sqrt{n}$ es el **error estándar de la media**. En realidad, el nombre completo es *desviación estándar de la distribución muestral de la media.*

OA6 Definir el error estándar de la media.

ERROR ESTÁNDAR DE LA MEDIA

$$\sigma_{\overline{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \tag{8-1}$$

Esta sección permite importantes conclusiones.

1. La media de la distribución muestral de medias será *exactamente* igual a la media poblacional si selecciona todas las muestras posibles del mismo tamaño de una población dada. Es decir,

$$\mu = \mu_{\overline{X}}$$

Aunque no seleccione todas las muestras, es de esperar que la media de la distribución muestral de medias se aproxime a la media poblacional.

2. Habrá menos dispersión en la distribución muestral de las medias que en la población. Si la desviación estándar de la población es σ, la desviación estándar de la distribución muestral de medias es $\sigma/\sqrt{n}$. Note que, cuando se incrementa el tamaño de la muestra, disminuye el error estándar de la media.

Autoevaluación 8-4

Repase los datos de Spence Sprockets, Inc., de la página 281. Seleccione al azar 10 muestras de 5 empleados cada una. Utilice los métodos descritos en el capítulo y la tabla de números aleatorios (apéndice B.6) para determinar los empleados que se incluirán en la muestra. Calcule la media de cada muestra y trace una gráfica de las medias muestrales en una gráfica similar a la 8-3. ¿Cuál es la media de las 10 medias muestrales?

Ejercicios

connect™

11. El apéndice B.6 es una tabla de números aleatorios. De ahí que cada dígito de 0 a 9 tenga la misma probabilidad de presentarse.

a) Trace una gráfica que muestre la distribución de la población. ¿Cuál es la media de la población?

b) A continuación aparecen los 10 primeros renglones de cinco dígitos del apéndice B.6. Suponga que se trata de 10 muestras aleatorias de cinco valores cada una. Determine la media de cada muestra y trace una gráfica similar a la 8-3. Compare la media de la distribución muestral de las medias con la media poblacional.

0	2	7	1	1
9	4	8	7	3
5	4	9	2	1
7	7	6	4	0
6	1	5	4	5
1	7	1	4	7
1	3	7	4	8
8	7	4	5	5
0	8	9	9	9
7	8	8	0	4

12. Scrapper Elevator Company tiene 20 representantes de ventas, que distribuyen su producto en Estados Unidos y Canadá. La cantidad de unidades que el mes pasado vendió cada representante se incluye a continuación. Suponga que estas cifras representan los valores de la población.

2	3	2	3	3	4	2	4	3	2	2	7	3	4	5	3	3	3	3	5

a) Trace una gráfica que muestre la distribución de la población.
b) Calcule la media de la población.
c) Seleccione cinco muestras aleatorias de 5 cada una. Calcule la media de cada muestra. Utilice los métodos descritos en el capítulo y en el apéndice B.6 para determinar los elementos que deben incluirse en la muestra.
d) Compare la media de la distribución muestral de medias con la media poblacional. ¿Esperaría que los dos valores fueran aproximadamente iguales?
e) Trace un histograma de las medias muestrales. ¿Nota alguna diferencia en la forma de la distribución muestral de las medias en comparación con la forma de la distribución de la población?

13. Considere que todas las monedas (un centavo, 25 centavos, etc.) que tenga en el bolsillo o monedero constituyen una población. Elabore una tabla de frecuencias, comience por el año en curso y cuente de manera regresiva, para registrar la antigüedad (en años) de las monedas. Por ejemplo, si el año en curso es 2009, una moneda que tiene impreso el año 2007 tiene dos años de antigüedad.
a) Trace un histograma u otro tipo de gráfica que muestre la distribución de la población.
b) Seleccione de manera aleatoria cinco monedas y registre la antigüedad media de las monedas seleccionadas. Repita el proceso 20 veces. Ahora trace un histograma u otro tipo de gráfica que muestre la distribución muestral de las medias.
c) Compare las formas de los dos histogramas.

14. Considere los dígitos de los números telefónicos de una página seleccionada al azar del directorio telefónico local como una población. Elabore una tabla de frecuencias con el último dígito de 30 números telefónicos seleccionados al azar. Por ejemplo, si el número telefónico es 5-55-97-04, registre un 4.
a) Trace un histograma u otro tipo de gráfica que muestre la distribución de la población. Con la distribución uniforme, calcule la media de la población y la desviación estándar de la población.
b) Registre, asimismo, la media de la muestra de los últimos cuatro dígitos (97-04 daría una media de 5). Ahora elabore un histograma u otro tipo de gráfica que muestre la distribución muestral de las medias.
c) Compare la forma de los dos histogramas.

8.6 Uso de la distribución muestral de la media

El análisis anterior reviste importancia, pues la mayoría de las decisiones que se toman en los negocios tienen como fundamento los resultados de un muestreo. He aquí algunos ejemplos.

1. Arm and Hammer Company desea cerciorarse de que su detergente para lavandería contiene realmente 100 onzas líquidas, como indica la etiqueta. Los registros de los procesos

de llenado indican que la cantidad media por recipiente es de 100 onzas líquidas y que la desviación estándar es de 2 onzas líquidas. A las diez de la mañana el técnico de calidad realiza la verificación de 40 recipientes y encuentra que la cantidad media por recipiente es de 99.8 onzas líquidas. ¿Debe interrumpir el proceso de llenado, o el error de muestreo es razonable?

2. A.C. Nielsen Company proporciona información a las empresas que se anuncian en televisión. Las investigaciones indican que, en promedio, los adultos estadounidenses ven televisión 6.0 horas al día. La desviación estándar es de 1.5 horas. En el caso de una muestra de 50 adultos que viven en el área de Greater de Boston, ¿sería razonable seleccionar al azar una muestra y encontrar que en promedio ven 6.5 horas al día?
3. Haughton Elevator Company pretende formular especificaciones relacionadas con el número de personas que pueden desplazarse en un elevador nuevo de gran capacidad. Suponga que el peso medio de un adulto es de 160 libras, y que la desviación estándar es de 15 libras. Ahora bien, la distribución de pesos no sigue una distribución de probabilidad normal. Tiene un sesgo positivo. ¿Cuál es la probabilidad de que, en una muestra de 30 adultos, el peso medio sea de 170 o más libras?

En cada una de estas situaciones hay una población de la cual existe determinada información. Se toma una muestra de esta población y se quiere saber si el error de muestreo, es decir, la diferencia entre el parámetro de población y la muestra estadística, se debe al azar. ¿O la diferencia no es un error de muestreo aleatorio y, por tanto, una diferencia estadísticamente significativa?

De acuerdo con los conceptos que se analizaron en la sección anterior, es posible calcular la probabilidad de que la media de una muestra se encuentre dentro de cierto margen. La distribución de muestreo seguirá la distribución de probabilidad normal con dos condiciones:

1. Cuando se sabe que las muestras se toman de poblaciones regidas por la distribución normal. En este caso, el tamaño de la muestra no constituye un factor.
2. Cuando se desconoce la forma de la distribución de la población o se sabe que no es normal, pero la muestra contiene por lo menos 30 observaciones. En este caso, el teorema central del límite garantiza que la distribución muestral de la media sigue una distribución normal.

Aplique la fórmula (7-5) de la sección 7.5 para convertir cualquier distribución normal en una distribución normal estándar. A este hecho también se le denomina valor *z.* Así, se emplea la tabla de la distribución normal estándar del apéndice B.1 para determinar la probabilidad de seleccionar una observación que caerá dentro de un intervalo específico. La fórmula para determinar un valor *z* es:

$$z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

En esta fórmula, X es el valor de la variable aleatoria; μ es la media de la población, y σ es la desviación estándar de la población.

OA7 Aplicar el teorema central del límite para calcular probabilidades de seleccionar posibles medias muestrales de una población específica.

Sin embargo, la mayor parte de las decisiones de negocios se refieren a una muestra, no a una sola observación. Así, lo importante es la distribución de $\overline{X}$, la media muestral, en lugar de X, el valor de una observación. Éste es el primer cambio en la fórmula (7-5). El segundo consiste en emplear el error estándar de la media de n observaciones en lugar de la desviación estándar de la población. Es decir, se usa $\sigma/\sqrt{n}$ en el denominador en vez de σ. Por consiguiente, para determinar la probabilidad de una media muestral con rango específico, primero aplique la fórmula para determinar el valor z correspondiente. Después consulte el apéndice B.1 para localizar la probabilidad.

CÁLCULO DEL VALOR z DE $\overline{X}$ CUANDO SE CONOCE LA DESVIACIÓN ESTÁNDAR DE LA POBLACIÓN

$$z = \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \qquad \textbf{(8-2)}$$